

JMC 2016 解説

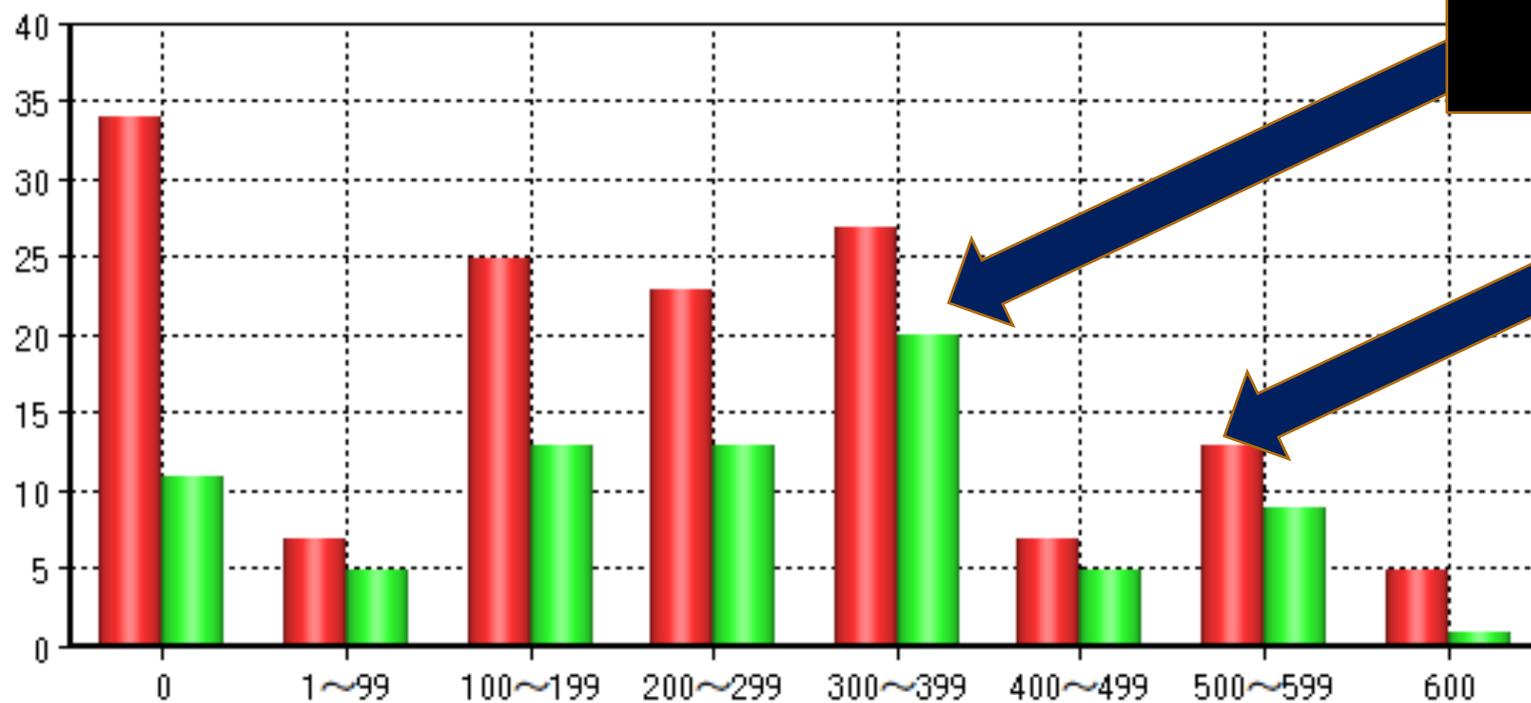
Square1001, E869120

はじめに

- 模擬予選、お疲れさまでした！
- 結果はすでにWeb上で閲覧できるはずです！

得点分布(全体)

得点分布 (全体)



有資格者

全体

それぞれの問題の概要

番号	問題名	想定解	例年との比較
1	情報オリンピック	条件分岐(やるだけ)	普通
2	核戦争	ソート	やや難
3	イラン	工夫した探索	やや易
4	日本国旗	DP	やや難
5	鉄道運賃②	グラフ	普通
6	色塗り	bit DP	普通

問題1 情報オリンピック

JMC 2016 Editorial

問題概要

- 5人の人がいる。
- それぞれの人の点数が与えられる。

- 480点以上・・・Rank A
- 200点以上480点未満・・・Rank B
- 200点未満・・・Rank C

- 各人は、それぞれ**ランク何**でしょうか？

解法

- まず、入力についてです。
- 5つの変数a, b, c, d, eを入力することを考えます。
- **cin >> a >> b >> c >> d >> e**

解法

- 次に、条件分岐・出力についてです。
- 480点以上がAランク、200～480点がBランク、それ以外がCランクだから、

• `if(a >= 480) cout << "Rank A" << endl;`

Aランクの場合

• `else if(a >= 200) cout << "Rank B" << endl;`

Bランクの場合

• `else cout << "Rank C" << endl;`

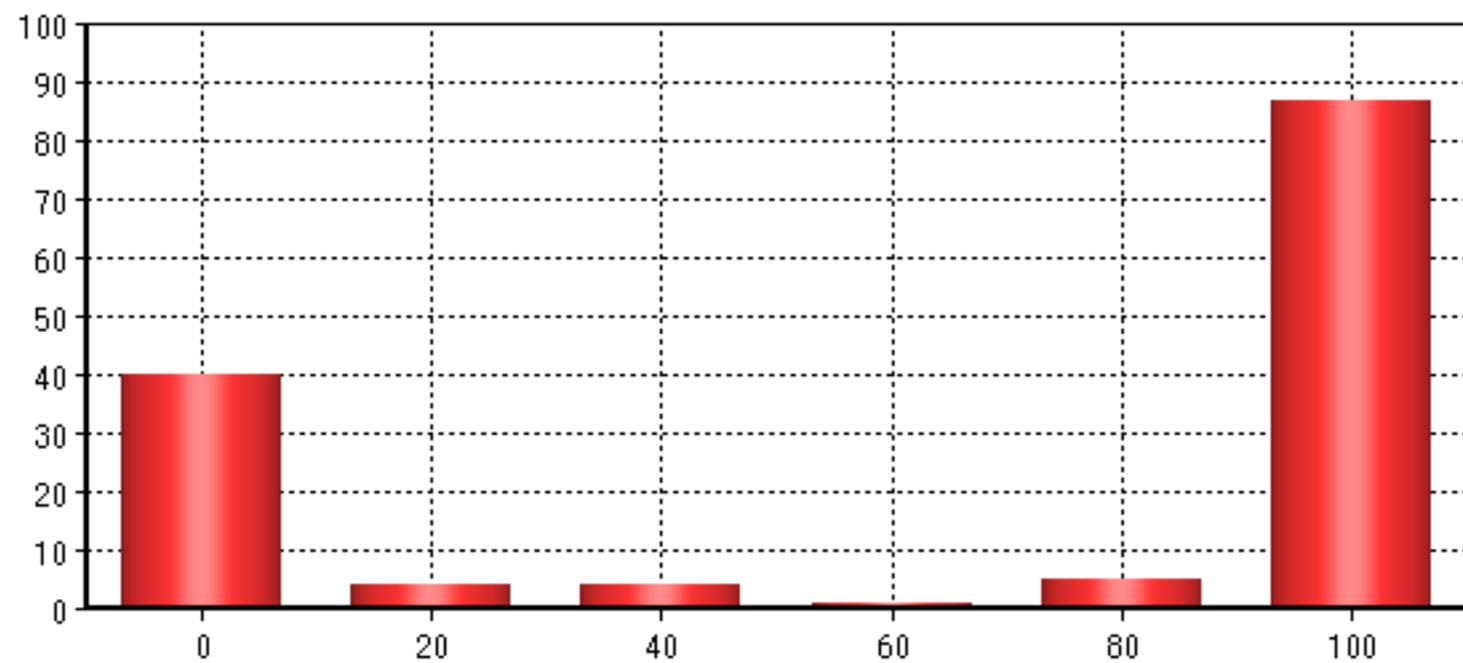
Cランクの場合

解法

- 一つ前のページでは1人目 (a) についてやりました。
- あとは、これを2人目～5人目についてやればいいだけです。
- ⇒コピー・貼りつけ！ これですべての問題は解けます。

得点分布

得点分布 (A問題)



問題2 核戦争

JMC 2016 Editorial

問題概要

- 整数 N が与えられる。また、整数 c_i ($1 \leq i \leq N$) と $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq c_i$) が与えられる
- $s_i = a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,c_i}$ の中央値とするとき、 s_1, s_2, \dots, s_N の平均値を切り捨てた値を出力しなさい

中央値とは？

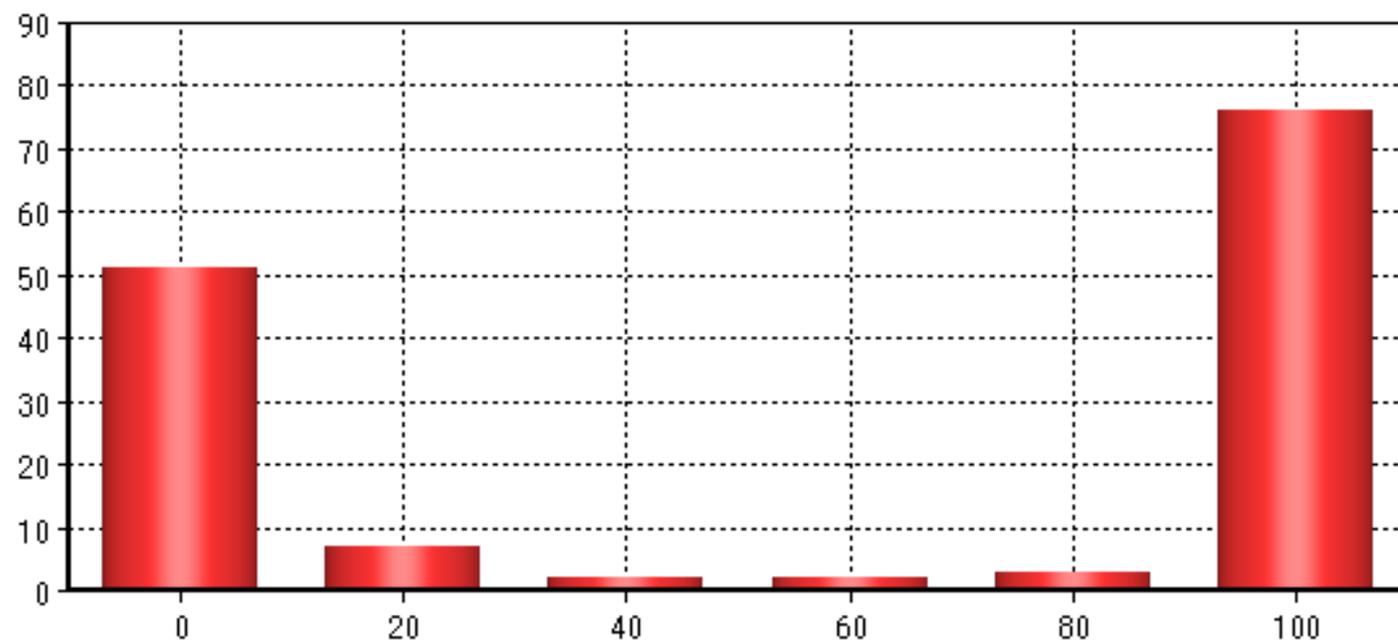
- 中央値とは, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{|x|}$ を昇順に並び替えた時の真ん中の値である ($|x|$ が偶数の場合, 真ん中2つの値の平均をとる)
- そこで, 数列 x を昇順にソートして, $x_{(|x|+1)/2}$ の値を求めてやればよい
- ソートするのに計算量 $O(|x| \log|x|)$ かかるので, 全体の計算量は $O(|x| \log|x|)$

解法

- 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ に対して中央値を求めてやればよいので, この計算量は $\sum c_i \log c_i$ となる
- 平均値を求めるのは $O(N)$ でできるので, 全体の計算量は $\sum c_i \log c_i$ となり, 最悪ケースでも通る

得点分布

得点分布 (B問題)



問題3 イラン

JMC 2016 Editorial

問題概要

- 文字列 S (長さ800まで) が与えられる。
- i 文字目が'I'、 j 文字目が'R'、 k 文字目が'A'、 l 文字目が'N'のとき、この4文字を選んだ時の幸福度は $(l-k)(k-j)(j-i)$ である。
- 幸福度の最大値を求めよ。

部分点解法(60点)

- 全探索をします。
- I,R,A,Nの場所はSの中から選ぶので、通り数は以下ようになります。
- $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
- 例えば、n=200のとき、通り数は約7000万となります。
- ⇒次のような四重ループを書けばいいです。

部分点解法(60点)

• これです。

```
for(int i=0;i<S.size();i++){  
    for(int j=i+1;j<S.size();j++){  
        for(int k=j+1;k<S.size();k++){  
            for(int l=0;l<S.size();l++){  
                if(S[i]=='I' && S[j]=='R' && S[k]=='A' && S[l]=='N'){  
                    maxn=max(maxn, (j-i)*(k-j)*(l-k));  
                }  
            }  
        }  
    }  
}
```

ループ

スコアは $(j-i)*(k-j)*(l-k)$

満点解法

- 実は、もっと速い解法があります。
- 各文字に分割することを考えます。

• 例えば、

IOIIRANIRAIRAAAAAN

のとき、

- ‘I’={0, 2, 3, 7, 10}文字目
- ‘R’={4, 8, 11}文字目
- ‘A’={5, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17}文字目
- ‘N’={6, 18}文字目

満点解法

- このように、各文字に分解すると定数倍高速化できます。
- (Iの個数) * (Rの個数) * (Aの個数) * (Nの個数)をpとすると、

- $\frac{p}{|S|^4} \leq \frac{1}{256}$

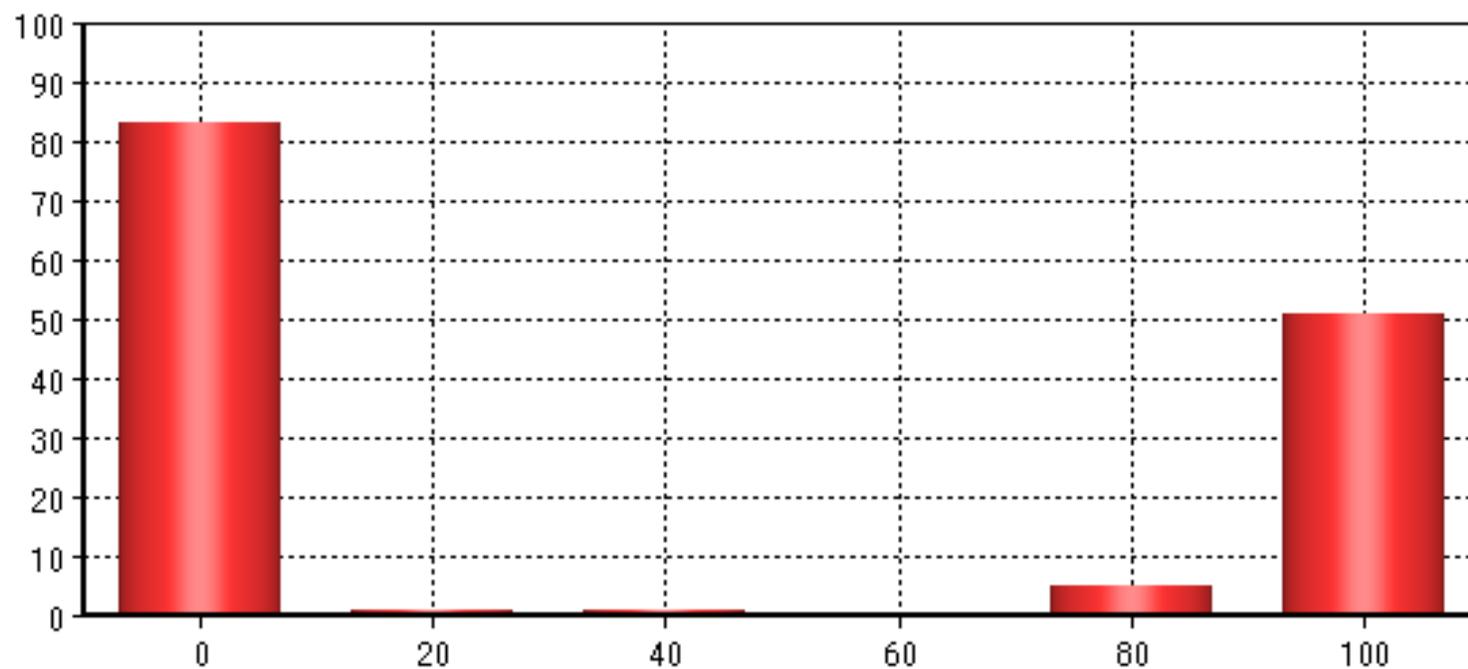
- よって、**約256倍以上**定数倍高速化できます。

さらに良い解法

- 貪欲に選ぶこともできます。
- IとNの位置は決まります。
 - Iの位置⇒'I'の中で一番左
 - Nの位置⇒'N'の中で一番右
- よって、あとは'R'と'A'の位置を全探索するだけです。
- よって、 $O(N^2)$ で解けます。

得点分布

得点分布 (C問題)



問題4 日本国旗

JMC 2016 解説

問題概要

- あなたは、以下のような国旗を作りたいです。

- 国旗に垂直な直線と水平な直線について線対称となっている。
- 任意の赤のマスから、他の赤のマスへ、辺を共有している赤のマスを辿ってたどり着くことが出来る。また、赤のマスによって囲まれる白のマスは存在しない。
- $1 \leq i \leq H/2 - 1$ を満たす整数 i について、国旗の i 行目に含まれている赤のマス個数は、国旗の $i + 1$ 行目に含まれている赤のマス個数以下である。
- 各行について、赤マスは一つのまとまりとなって配置されている。すなわち、ある行に赤マスがあるのであれば、その行の赤マスがある左端の列を L 列目、右端の列を R 列目として、 $L \leq i \leq R$ を満たすすべての i について、 i 列目は赤マスとなっている。
- 国旗の 1 行目、 1 列目、 H 行目、および W 列目に赤のマスが含まれない。

- そのとき、元々の旗を日本国旗にするためには最低何マス色を変えればいいでしょうか、求めなさい。

解法

- まず、日本国旗を折り紙みたいに折り、4分割することを考えます。(左右対称だから)

W	R	W	W	R	W
W	R	R	R	R	R
R	R	W	W	W	R
W	W	W	W	R	W
W	R	W	W	W	R
W	R	R	R	W	W

0	2	0
2	2	1
0	1	2
0	1	0
0	1	1
2	1	0

2	3	0
2	3	2
0	2	2

各マス(折り返し含む)の赤の個数

解法

- あとは、4分割され合成された $(H/2)*(W/2)$ の図形について、上から見て赤い部分が単調増加になるようにしなければなりません。
- よって、上から見ていくことを考えます。
- なお、右図は各マスについての赤い場所の総数です。
 - 折り返しがあるから、最大で4個になる

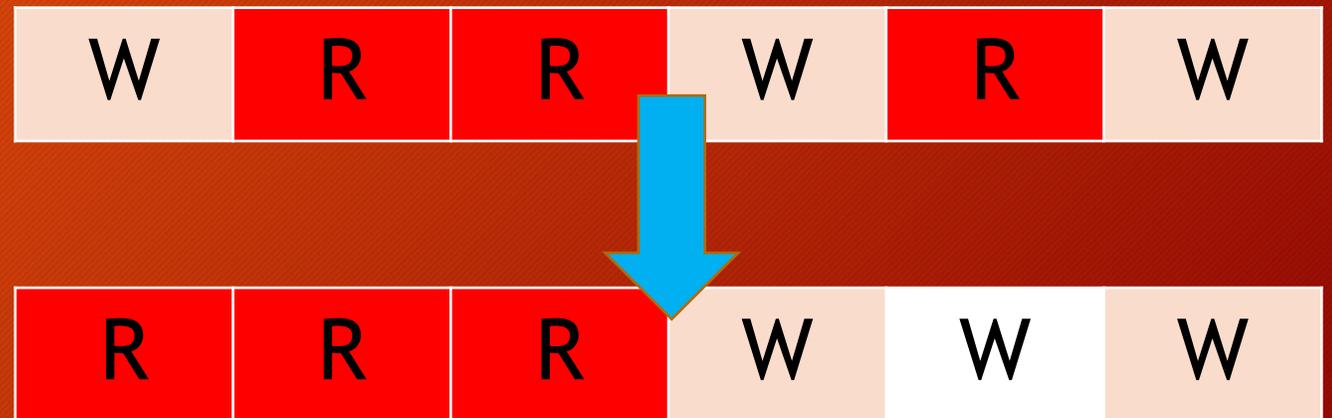
2	3	0
2	3	2
0	2	2

解法

- よって、この問題は動的計画法で解くことができます。
- **dp[今何段目か][前の段に何個赤いものがあるか]=最小の変える個数**
- dp[i][j]と表すとき、
- この段に何個赤で塗るか、というパラメータは j 以上でなければなりません。

解法

- つまり、
- $dp[i+1][k] = \min(dp[i+1][k], dp[i][j] + p)$ $[j \leq k \leq W/2]$
- ※ p は $i+1$ 段目を、 $1 \sim k$ の区間は赤で、 $k+1 \sim W/2$ の区間は白で4塗った時のコスト
- で表すことができます。
- 計算量は、 $O(H^2W)$ です。



この場合、コストは2となります。

解法

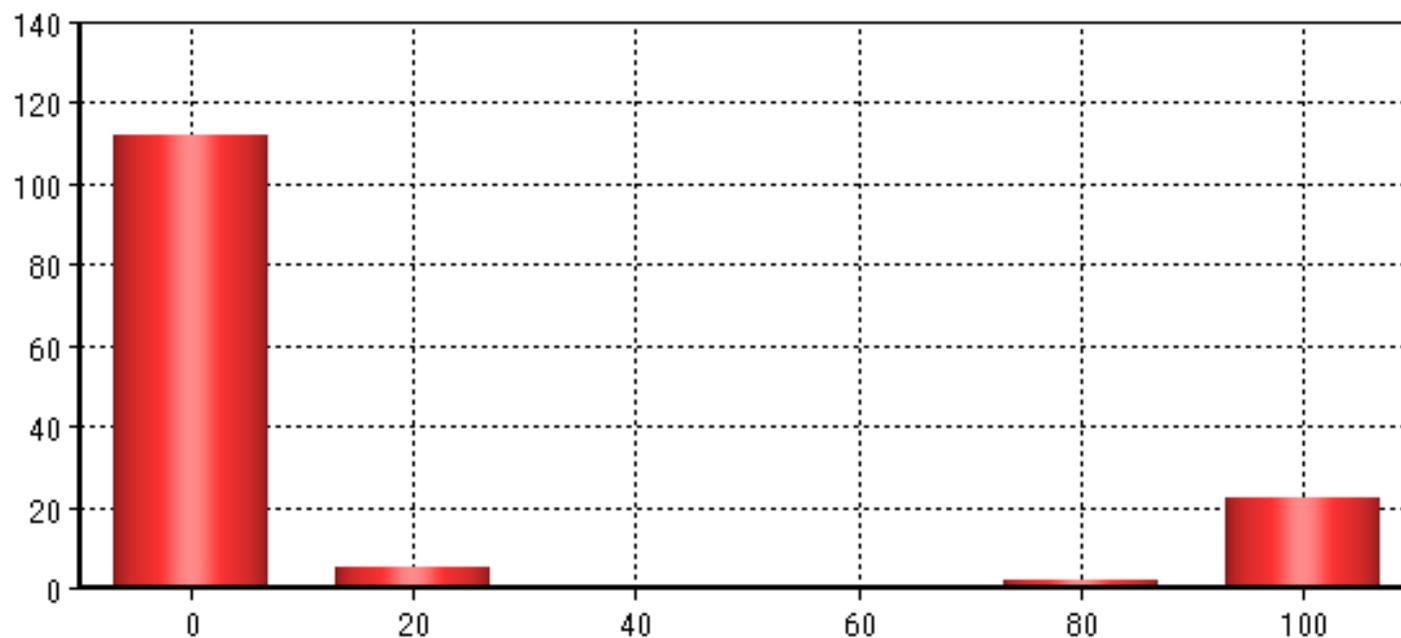
- 例えば、右図の場合、こんな感じになります。
- (最小値 / 変えるのに必要なコスト)

	赤0マス	赤1マス	赤2マス
0段目	0		
1段目	5 / 5		
2段目	12 / 7	12 / 7	10 / 5
3段目	16 / 4	20 / 8	18 / 8

2	3	0
2	3	2
0	2	2

得点分布

得点分布 (D問題)



問題5 鉄道運賃2

JMC 2016 Editorial

問題概要

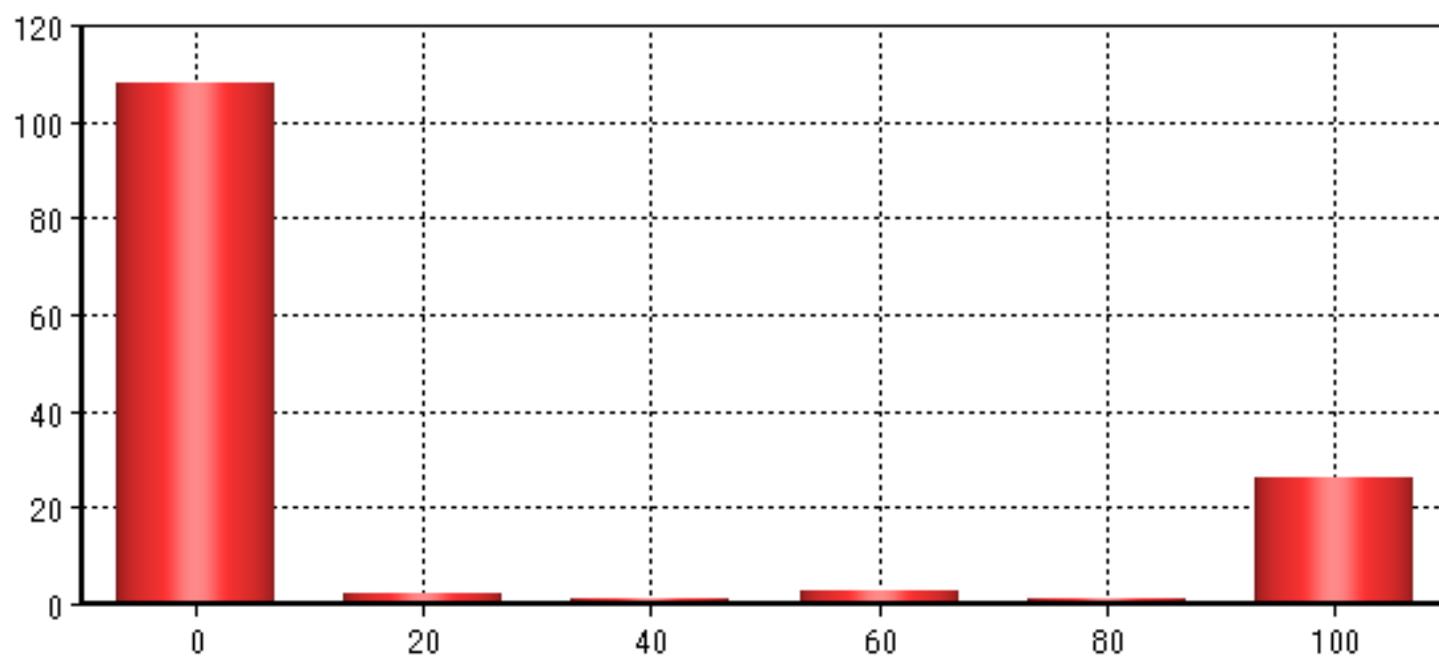
- N 頂点のグラフを作ること考える
- M 個の辺追加操作が与えられ、それぞれの辺追加操作では整数 A, B, C, P が与えられる。そのとき、 $A-B, B-C, C-A$ を双方向に結ぶ重さ P の辺を追加する
- 頂点 x から y まで移動するときのパスの重みを Q_1, Q_2, \dots, Q_K とするとき、 $\max(Q_1, Q_2, \dots, Q_K)$ の値が最小になるようなときの値を $\mathit{mindist}(x, y)$ とする
- スタート地点 s が与えられるので、 $\mathit{mindist}(s, 1), \mathit{mindist}(s, 2), \dots, \mathit{mindist}(s, N)$ を求めなさい

解法

- ダイクストラ法で求めることを考える
- 最短経路問題でダイクストラ法を使うときは、パスの重みの合計を記録しておくが、ここでは最大値を求めることによってできる
- これは普通の最短経路問題のコードを少し改造するだけであり、簡単に実装することができる
- 計算量は $O(M \log N)$

得点分布

得点分布 (E問題)



問題6 色塗り

JMC 2016 解説

問題概要

- $H \times W$ のマス目を4色で塗ることを考える
- そのとき, 次の条件を満たしていなければならない
 1. 辺を共有するマスは違う色でなければならない
 2. i 行 W 列のマスの色と $i+1$ 行 1 列のマスの色は違う色でなければならない
 3. $2 \times K$ のマス目も与えられ, $H \times W$ の部分にそれを含んではならない
- 最初のマスが与えられるので, 条件を満たす塗り方の中で最も塗り替えるマス数が少ないものは, いくつのマスを塗り替えるか。また, そのような通り数は何通りか。10009で割った余りを求めよ。

解法1 - 全探索

- 条件を満たす / 満たさない は関係なく, マス目の状態を全探索する
- 条件を満たすかの判定, 変わったマス目の数は $O(HWK)$ でできるので,
- 計算量は $O(4^{HW} \times HWK)$

解法2 - バックトラック

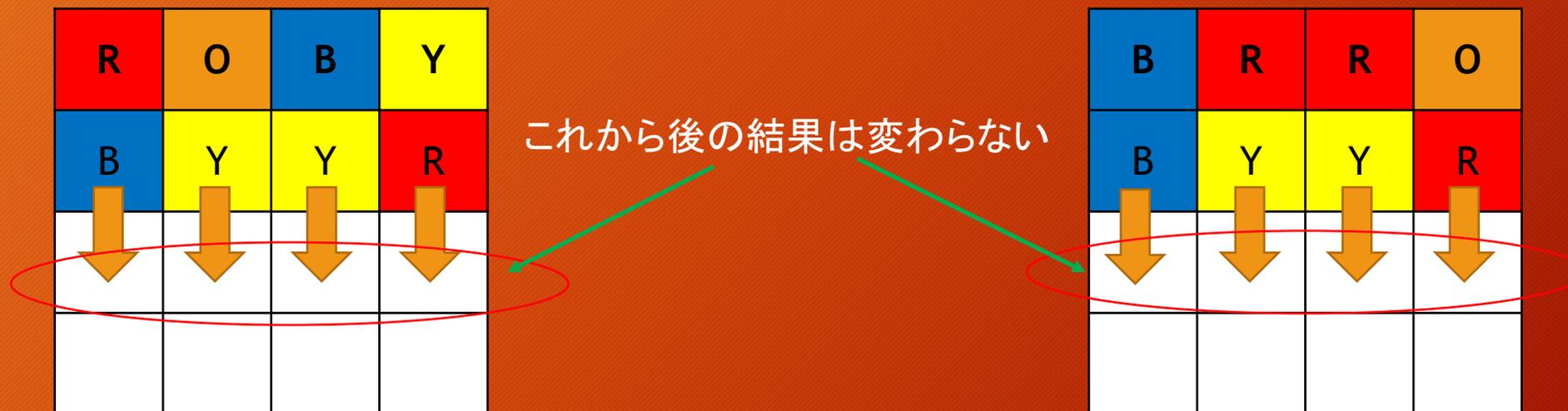
- 左上のマスから順に埋めていくことを考える
- バックトラックを使うことで、枝刈りをできる (最初以外は各状態につき枝分かれが3個以内)
- よって、計算量は $O(3^{HW}HWK)$
- $\Rightarrow H = 4, W = 4, K = 2$ の入力例1には通る

解法3 - 全探索

- 上から下、左から右に1マスずつ埋めていくことを考えます。
 - 次置くマスが条件を満たすときのみ再帰をします。
 - 満たさない場合ここで探索を打ち切ります。
 - そうすると結構いけます。
- このようにバックトラックに枝刈りを加えると、入力例2にも通ります。
- ⇒これで40点！

解法3 - 上から1行ごとに埋めていく

- すぐ上の行の塗り方が変わらなければ, 枝分かれの状態は変わらない
- \Rightarrow 1行の塗り方は $O(3^W)$ 通りなので, 動的計画法で求められる

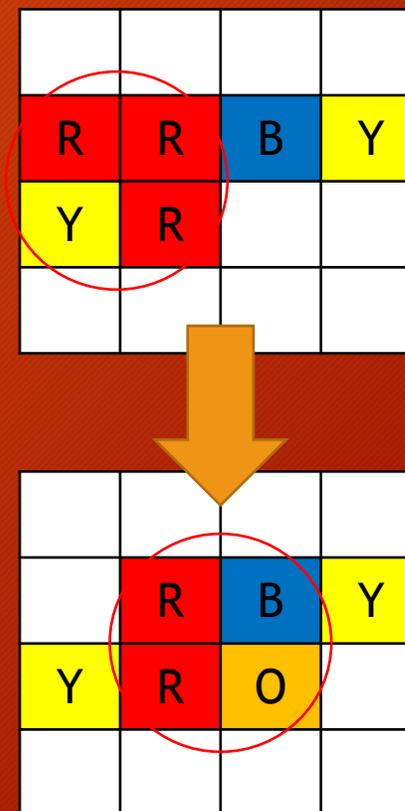


解法3 - 上から1行ごとに埋めていく

- $O(3^W)$ の状態数から $O(3^W)$ の状態数に向かってDPしていくので、計算量は $O(3^{2W}HK)$ くらいで解ける (あまり確かめてないので正確ではなさそう)
- こういうのを実装するときにはだいたい定数が遅いので、そのままだと $W \leq 8$ くらいのケースしか実行できなさそう

解法4 - 工夫した動的計画法

- 実際に, この問題は $O(3^{H+K}HWK)$ とかで解くことができる
- JOI 2010-2011 予選6「JOI旗」という問題がある
- この問題の解法とは似ていて, 実際には今探索している地点からH+K個前の状態までで結果が決まってしまう
- なので, H+K個の間隔でスライドさせていくように状態を遷移すれば解ける

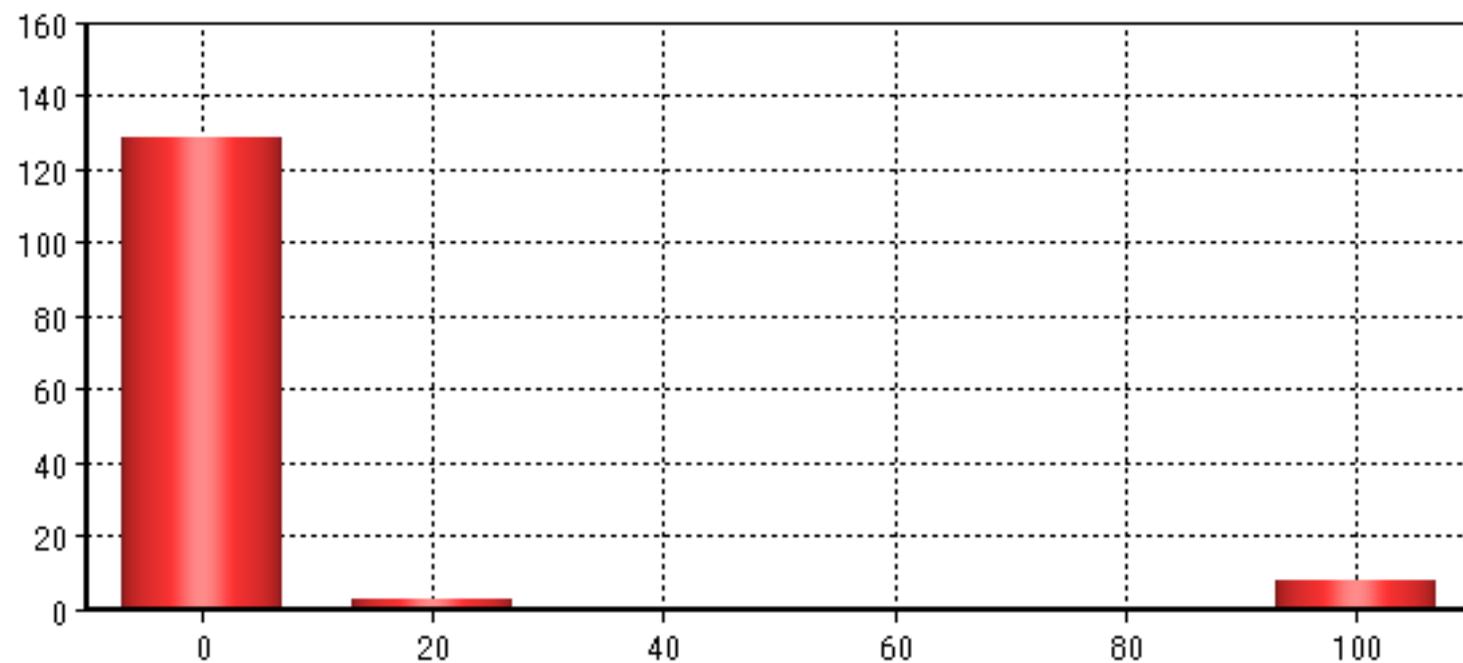


解法4 - 工夫した動的計画法

- この問題の制約は, $H, W \leq 9, K \leq 3$ なので, 計算量的には十分間に合いそう
- これで, この問題は100点!

得点分布

得点分布 (F問題)



最後に

- 今回の試験は、JOIのためになったでしょうか。
 - 有資格者のみなさんは、情報オリンピックがんばってください。
 - そうでない人も、今回のJMCに参加していただき本当に有難うございます。
-
- E869120, square1001

おしまい

